



TITLE:

# 磁場のない無衝突プラズマにおける緩和現象

AUTHOR(S):

西川, 恭治; 池上, 英雄

---

CITATION:

西川, 恭治 ...[et al]. 磁場のない無衝突プラズマにおける緩和現象. 物性研究 1968, 10(1): 14-38

ISSUE DATE:

1968-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/86556>

RIGHT:

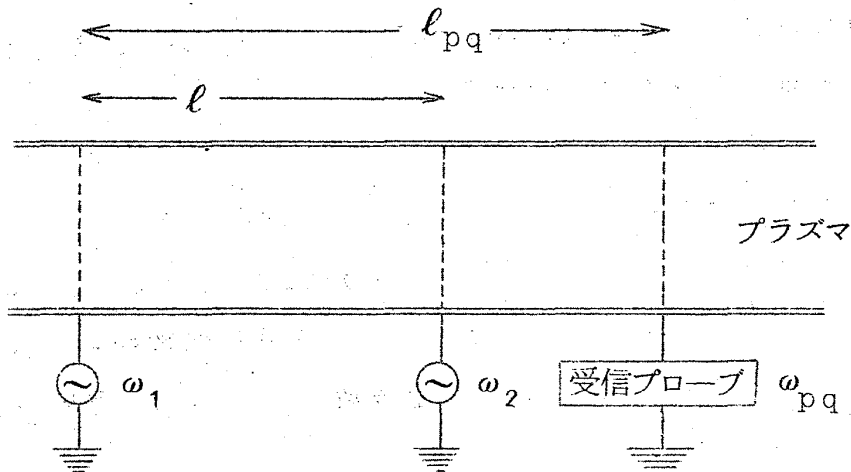
## 磁場のない無衝突プラズマにおける緩和現象

西 川 恭 治 (京大理)

池 上 英 雄 (名大プラズマ研)

### § 4 Plasma Wave Echo

まず現象から説明しよう。プラズマ中に、第3図のように、距離 $\ell$ だけ離してグリッドを二つ備え、それぞれに $\omega_1$ ,  $\omega_2$ の振動数の振動電場を加える。



第 3 図 Echo の測定方法

するとそれらのグリッドから、分散関係をみたすような波がプラズマ中を伝わって行くが、それらは  $A_j = K''(\omega_j)^{-1}$  ( $j = 1, 2$ ) という距離進めばランダウ減衰して消えてしまう。 $\ell$  を  $A_j$  より充分長くとおけば、二つの波の間の直接の相互作用は考えなくてよい。そのような条件のもとで、第一のグリッドから

$$\ell_{pq} = \ell \omega_2 / \omega_{pq} \quad (\omega_{pq} = -p\omega_1 + q\omega_2 > 0) \quad (50)$$

( $p, q$  は正の整数) だけ離れた附近に、振動数  $\omega_{pq}$  の波が現われることがある。これを plasma wave echo と呼んでいる。ただし、 $(\ell_{pq} - \ell)$

は  $A_1, A_2, A_{pq} \equiv K''(\omega_{pq})^{-1}$  より充分長くなるようにしないと, echo はきれいに観測されない。

この現象は, 電子プラズマ振動について (主として  $p=1, q=2$  の場合に) Malmberg et al.<sup>15)</sup> により, またイオン音波について (主として  $p=q=1$  の場合に) 池地・高橋<sup>16)</sup> および Baker et al.<sup>17)</sup> によって, それぞれ観測されている。

この現象は, 最初 Gould et al.<sup>18)</sup> により理論的に予言された。彼らはまず最も次数の低い場合の temporal echo で考えた。すなわち,  $t=0$  で波数  $\pm k_1$ ,  $t=\tau > 0$  で波数  $\pm k_2$  の波を励振すると,

$$\tau' = \tau k_2 / k_3, \quad k_3 = k_2 - k_1 > 0 \quad (51)$$

という時刻に波数  $\pm k_3$  の波が現われるというのである。ただし,  $\tau$  および  $(\tau' - \tau)$  は, ランダウ減衰に要する時間は  $|r^{-1}(k_j)|$  ( $j=1, 2, 3$ ) より充分長くなるようにする。

この現象の簡単な説明として, Gould らは次のような説明を加えている。まず,  $|(t-\tau) r(k_j)| \gg 1$  という time scale では, ランダウ減衰する項を省いた前稿 (49) 式で表わされる分布関数を考えれば充分である。今,  $t=0$  で波数  $(-k_1)$ ,  $t=\tau$  で波数  $k_2$  のパルス電界をかけたとすると,  $k=k_3$  の分布関数

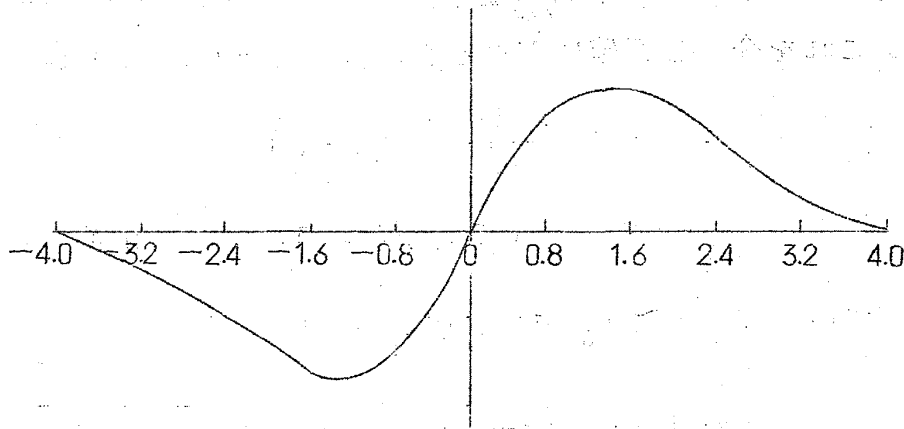
$$\begin{aligned} f(v, k_3, t) &\sim \exp[i k_1 v t] \exp[-i k_2 v (t-\tau)] \\ &= \exp[-i k_3 v (t-\tau')] \quad (52) \end{aligned}$$

というふるまいを示すであろう。 $t=\tau'$  では, この位相因子は零になるので, そのとき (52) を  $v$  について積分しても phase mixing を起して消えるようなことはない。その結果  $t=\tau'$  で  $k_3$  という波数の波が現われるというのである。高次 ( $p+q>2$ ) の echo や, 実験にかかっている spatial echo についても全く同様な説明が行われている。

この簡単な説明からも分るように, plasma wave echo は, プラズマが, 過去に励振された記憶をランダウ減衰によって失わないことを明瞭に示した

現象である。

しかし、上の説明では、プラズマが互いにクローン相互作用を行っている粒子からなるということは、どこにも考慮に入っていない。云いかえれば、上の説明で echo ができるためには、プラズマが波動を伝えるという性質は何ら必要ないのである。従ってまた、現われる echo も波動である必然性は何もないのである。実際、このような考え方で、クローン相互作用を無視して計算された echo の line - shape は例えば第 4 図のようになり、波動らしきふるまいはほとんど示していない。



第 4 図

Particle echo の line shape。横軸は  $\theta k_3 [t - \tau']$  ,

$\theta$  は熱速度,  $k_3 = k_2 - k_1$ ,  $\tau' = \tau \cdot k_2 / [k_2 - k_1]$ , また

$4V_1 e / m \theta = 0.5$  とおいた。

これに対して、実際に観測されているものは、例えば第 6 図に示すように、すべて伝播する波としての echo (wave echo) である。このような、波動としての echo が存在することを示すには、上の簡単な説明では不十分であり、クーロン相互作用をもとり入れた Vlasov 方程式にたちかえって考えてみる必要がある。これは文献 18) に行われているが、以下では、これと少し別の立場から、wave echo のできる条件を調べてみることにしよう。

分り易いために、一次元電子プラズマ<sup>\*</sup>の temporal echo で考える。これを spatial echo にやき直すことは極めて簡単である。まず、線形近似におけるランダウの初期値問題の解 (前稿, (26), (28) 式をみよ)

$$E(k, t) = \frac{4\pi i e}{k} \int_{-\infty + i\beta}^{\infty + i\beta} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\epsilon(k, \omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{-i\omega + ikv} g(v, k) \quad (53)$$

( $\beta > 0$ ) を考えよう。ここに  $g(v, k) = f_e(v, k, t=0)$  で、 $\epsilon(k, \omega)$  は誘電率 (前稿 (19) 式) である。さて、前稿で、もしも  $g(v, k)$  が  $v$  の関数として entire function であれば、(53) は通常のランダウ減衰を示す解を与えるが、 $g(v, k)$  が  $v$  の関数として、例えば (45) のような形をしていれば、 $E(k, t)$  は  $t < t_0$  という時間の間成長することを示した。これを今少し正確にのべると、もしも  $g(v, k)$  が

$$g(v, k) \sim \exp[ikvt_0] / k[v - \zeta] \quad (\text{Im } k\zeta > 0, t_0 > 0) \quad (54)$$

という形をしていれば、 $t \simeq t_0$  で  $E(k, t)$  は

$$E(k, t) \sim \begin{cases} \exp[-ik\zeta(t-t_0)] \equiv \exp[-ik\xi(t-t_0) + k\eta(t-t_0)] & (t < t_0) \\ \exp[-i\omega(k)(t-t_0) + r(k)(t-t_0)] & (t > t_0) \end{cases} \quad (55)$$

( $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $k\eta > 0$ ) というふるまいを示されることが示される。ここに  $\omega = \omega(k) + ir(k)$  は分散関係  $\epsilon(k, \omega) = 0$  の解で、 $r(k) < 0$  である。(55) は明らかに、 $t \simeq t_0$  で wave echo を構成する。

そこで、実際に plasma wave echo が現われる場合には、このような初期条件が実現していることを示すことにしよう。

まず、 $t=0$  で波数 ( $\pm k_1$ )、 $t=\tau > 0$  で波数 ( $\pm k_2$ ) のという波を励振するという操作は、次のようなパルス電界が外からかかったとして表わすことができる。

脚注米) イオンは一様にぬりつぶして考える。

$$E_{\text{ext}}(k, t) = V_1 \{ \delta k, k_1 + \delta k, -k_1 \} \delta[t] \\ + V_2 \{ \delta k, k_2 + \delta k, -k_2 \} \delta[t - \tau], \text{-----}(56)$$

この外場がかかる以前はプラズマ中には fluctuation は存在しなかったとすると、今問題にする波数  $\pm k_3 = \pm(k_2 - k_1)$  の fluctuation は、 $t = \tau + 0$  という時刻に始めて作られたと考えられる。そこでそれを初期値とみなして考えてみよう。その初期値を計算するには、外場を source とみなして、非線形 Vlasov 方程式 (4) を積分すればよい。外場に関する二次では、(8) を用いて

$$f^{(2)}(v, \pm k_3, t = \tau + 0) = \int_{\tau-0}^{\tau+0} dt' \frac{e}{m} E_{\text{ext}}(\pm k_2, t') \\ \frac{\partial}{\partial v} f^{(1)}(v, \mp k_1, t') \\ = \frac{e}{m} V_2 \frac{\partial}{\partial v} f^{(1)}(v, \mp k_1, \tau). \text{----}(57)$$

ここに superscript は外場に関する次数を表わす。 $E_{\text{ext}}(\mp k_1, t')$  の寄与は、 $|\tau r(\mp k_1)| \gg 1$  として無視した。(57) で  $f^{(1)}(v, \mp k_1, \tau)$  は (49) を用いて計算できる。その場合、 $t = -0$  を初期時刻にとれば初期値の寄与は零としてよい。また、誘電率の定義から

$$E^{(1)}(\mp k_1, \mp k_1 v) = \frac{E_{\text{ext}}(\mp k_1, \mp k_1 v)}{\epsilon(\mp k_1, \mp k_1 v)} = V_1 / \epsilon(\mp k_1, \mp k_1 v)$$

であるから、結局

$$f^{(1)}(v, \mp k_1, \tau) = \frac{e}{m} V_1 e^{\pm i k_1 v \tau} \frac{1}{\epsilon(\mp k_1, \mp k_1 v)} \frac{\partial}{\partial v} F(v) \text{---}(58)$$

がえられる。これを (57) に代入すれば、求める初期値は

$$f^{(2)}(v, \pm k_3, \tau+0) = \frac{e^2}{m^2} V_1 V_2 \frac{\partial}{\partial v} e^{\pm i k_1 v \tau} \frac{1}{\epsilon(\mp k_1, \mp k_1 v)} \frac{\partial}{\partial v} F(v) \quad (59)$$

となる。ところで、この関数は、

$$\epsilon(\mp k_1, \mp k_1 v) = 0 \quad \text{at} \quad \mp k_1 v = \mp \omega(k_1) + i r(k_1) \quad (60)$$

( $r(k_1) = r(-k_1) < 0$ ,  $\omega(-k_1) = -\omega(k_1)$ ) に注意すると、

$$\begin{aligned} f^{(2)}(v, \pm k_3, \tau+0) &\sim \frac{e^{\pm i k_1 v \tau}}{k_1 v - \omega(k_1) \pm i r(k_1)} \\ &\sim \frac{\exp[\pm i k_3 v (k_1 \tau / k_3)]}{\pm k_3 \left[ v - \frac{\omega(k_1)}{k_1} \pm \frac{i r(k_1)}{k_1} \right]} \quad (61) \end{aligned}$$

というふるまいを示すが、これは

$$k_1 \tau / k_3 = t_0, \quad \frac{\omega(k_1)}{k_1} = \xi, \quad -\frac{r(k_1)}{k_1} = \eta \quad (62)$$

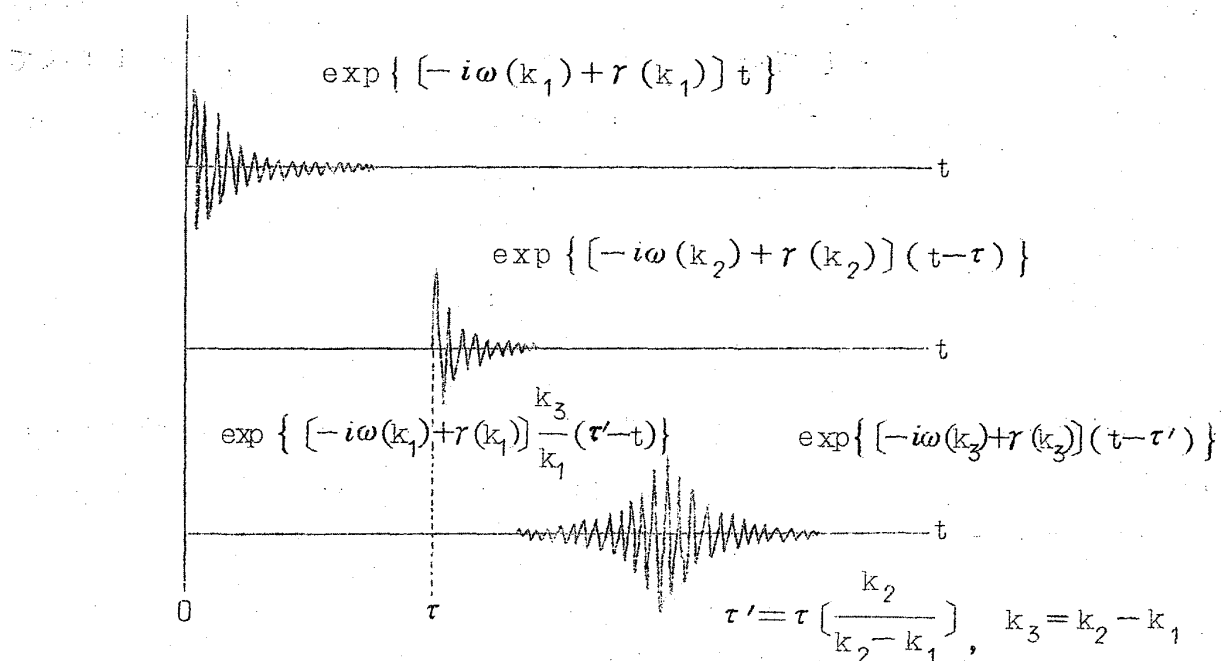
とおけば、まさに (54) の形をしていることが分る。こうして

$$t \doteq \tau + t_0 = \tau' \quad (63)$$

という時刻に wave echo が現われることが分った。

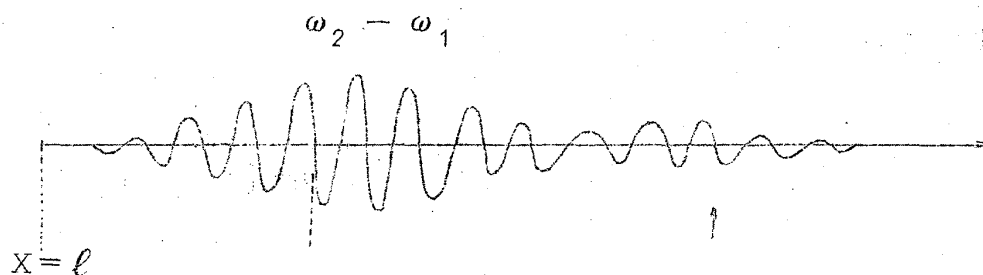
ところで、(62) を (55) に入れてみて直ちに分ることは、echo の生成過程に現われる振動は、プラズマの分散関係をみたす振動とは一般に異なることである。このことは、wave echo を単純にランダウ減衰の逆過程と考えたのではいけないことを示している。また、これから分る今一つの重要なことは、echo の line shape が一般には非対称になることである。実際、Gould らにより計算された例を示すと第5図のようになる。

ところで、echo の line shape を今少しくわしく調べると、いくつかの点で興味深い特徴が現われて来ている。その第一は、echo の peak の位置が系統的に先の方へ (temporal echo では  $t > \tau'$  の方向へ) シフトしていることであり、第二は、echo のすその方で、temporal echo で云えば



第 5 図

Plasma wave echo for  $k_3 \simeq k_1 \simeq \frac{1}{2} k_2$



第6図, Wave echo における第二の maximum の例。

$X$  = 第一のグリッドからの距離,  $l$  = 第二のグリッドの位置。

$$l' = \omega_2 l / [\omega_2 - \omega_1]。$$

$t > \tau'$  の領域に, しばしば第二の maximum が現われていることである (第6図)。この他にもいくつかの特徴が現われているが, 上の二つについては簡単な説明が試みられているので, それを以下に示そう。

まず peak shift は次のように考えればよい。上の議論では  $k = \pm k_3$  の fluctuation は  $t = \tau$  にのみ作られるとしたが, 実際には source は



$E(\pm k_2, t')$  が存在する間, すなわち  $\tau \leq t' \leq \tau + r^{-1}(k_2)$  の間ぐらいは連続的に働いている。そしてその間に作られた  $f^{(2)}(v, \pm k_3, t)$  はすべて初期値として, その後の  $E^{(2)}(k_3, t)$  に影響を与えているはずである。今  $t = t' > \tau$  に作られた fluctuation は, 前と同様の考察から

$$t = t' + \frac{k_1}{k_3} \quad t' = \tau' + \frac{k_2}{k_3} (t' - \tau) \quad \text{-----} (64)$$

という時刻に echo を作る。実際に観測される echo は, これら各時刻に作られる echo の superposition であるから, echo の peak は一般に  $t > \tau'$  の方向に shift すると考えられる。<sup>\*</sup>

実際に観測される echo が沢山の elementary echoes の superposition であるとすれば, ある場合には干渉効果で echo を消し合うことも考えられる。それと思われる性質もイオン音波での実験にかかっているが, 定量的な点でまだ理論との対応が不完全である。

次に第2の maximum については, まず次のようなことが考えられる。今までは source term として外場に関して2次の項しか考えて来なかったが, 4次まで含めると, 例えば

$$\begin{aligned} f^{(4)}(v, \pm k_3, t=\tau+0) &\sim \int_{\tau-0}^{\tau+0} dt' \frac{e}{m} E^{(2)}(\pm [k_1+k_2], t') \\ &\quad \frac{\partial}{\partial v} f^{(2)}(v, \mp 2k_1, t') \\ &\sim \frac{e}{m} E^{(2)}(\pm [k_1+k_2], \tau) \frac{\partial}{\partial v} f^{(2)}(v, \mp 2k_1, \tau) \end{aligned} \quad \text{-----} (65)$$

という項が存在する。今  $f^{(2)}(v, \mp 2k_1, \tau)$  は前と同様の計算で

---

脚注\*) この議論を spatial echo に適用するときには若干注意を要する。なぜなら,  $E(\pm k_2, t')$  に対応する  $E(x', \pm \omega_2)$  は  $x' \geq \ell$  のみならず  $x' \leq \ell$  にも存在しうるからである。しかし実際には第3図で左から右への粒子の遅い遅い流れがあり, そのため  $x' < \ell$  の領域には波がほとんどできていないことが確かめられている。

$$f^{(2)}(v, \mp 2k_1, \tau) \sim \frac{\exp[\pm i 2k_1 v \tau]}{\epsilon(\mp 2k_1, \mp 2k_1 v)}$$

という形をしているから、(65)を初期値にえらべばやはり wave echo を作りうる。今度は echo の位置は

$$t \simeq \tau + \frac{2k_1}{k_3} \tau = \tau' + \left(\frac{k_1}{k_3} \tau\right) \quad (66)$$

となるので、これは2次の echo のすその方に第2の maximum を作る可能性がある。一般に 6次, 8次, ... と進めば、次々に

$$t - \tau' = 2 \left(\frac{k_1}{k_3} \tau\right), \quad 3 \left(\frac{k_1}{k_3} \tau\right), \quad (67)$$

というところに高次の echoes を生じうることが簡単に示せる。ただ、こうしてできる ( $v_1$  に関しての) 高次の echoes の強度は、一般に  $v_1$  を余程大きくしない限り観測にかかる程度にならない。

これに対して、echo に第二の maximum を生ずるだけなら、何も上のようなことを考えなくても、一般に  $v_2$  に関して高次になるほど echo の位置を先へ先へと伸ばす傾向のあることを考慮に入れただけで説明できるかもしれない。

以上では wave echo に重点をおいて調べて来たが、それなら最初にのべた波にならない echo <sup>\*</sup> は、これと共存しうるのだろうか。それをみるために、今一度2次の temporal echo を考えてみよう。今、(59)を(53)の  $g(v, k)$  に代入し、本質的な部分だけを捨い出すと

$$\begin{aligned} E(k_3, t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\epsilon(k_3, \omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{-i\omega + ik_3 v} \frac{e^{ik_1 v \tau}}{\epsilon(-k_1, -k_1 v)} F(v) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{e^{-ik_3 v (t-\tau')}}{[v-u(k_3)][v-u(-k_1)]} e^{-v^2/\theta^2} \Phi(v) \quad (68) \end{aligned}$$

脚注\*) これを wave echo に対して particle echo と呼ぶことにする。

ただし

$$u(k) = \frac{\omega(k) + i r(k)}{k}, \quad F(v) \propto e^{-v^2/\theta^2}$$

とし,  $\omega$  の積分を先に履行して  $\omega = k_3 v$  の極の寄与のみを捨てた。 $\Phi(v)$  は  $v$  の smooth function である。ところで, (68) の被積分関数は  $v \rightarrow \infty$  で essential singularity をもつので,  $v$  の積分路を単純にある半面にとじさせることはできない。しかし, 一般に実数  $\alpha$ , 複素数  $\zeta$  に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x-\zeta} e^{i\alpha x} = \begin{cases} e^{-\alpha^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x-(\zeta-i\alpha/2)} + 2\pi i e^{-\zeta^2+i\alpha\zeta} \text{sign } \alpha \\ \quad (0 < \alpha \text{Im } \zeta < \alpha^2/2) \quad \text{--- (69)} \\ e^{-\alpha^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x-(\zeta-i\alpha/2)} \quad (\text{otherwise}) \end{cases}$$

が成り立つことに注意すると, (68) は,

$$\left| \frac{k_3 \theta r(t-\tau')}{2} \right| > 1 \quad (r = r(-k_1), r(k_3))$$

という条件のもとで, (69) の右辺の二つの項に対応して, 二つの部分からなることが分る。この中第二項の寄与は, 前にのべた wave echo をそのまま表わす。これに対して第一項は,

$$\exp \left[ - \left\{ k_3 \theta (t-\tau') / 2 \right\}^2 \right]$$

という時間依存性を示し, 従って波としてのふるまいは示さない。これが第4図に示した particle echo に対応するものである。特に  $\epsilon(k, \omega) \equiv 1$  として計算するとこの項のみが残り, それは一般に高次まで含めて exact に計算<sup>19)</sup>されていて, 次式で与えられる。

$$n(k_{pq}, t) = (-i)^{q-p} \exp \left\{ - \left[ \frac{k_{pq} \theta(t-\tau_{pq})}{2} \right]^2 \right\} \\ \times J_p(-k_{pq} v_1 [t-\tau_{pq}]) J_q(-k_{pq} v_2 [t-\tau]) \quad \cdots (70)$$

ここに  $J_n(x)$  はベッセル関数，また

$$k_{pq} = -p k_1 + q k_2, \quad v_j = \frac{2e}{m} V_j \quad (j = 1, 2)$$

$$\tau_{pq} = \tau q k_2 / k_{pq}$$

である。

こうして echo は，一般に (55) の形の wave echo と，(70) の形の particle echo との重ね合わせからなることが分った。通常の実験条件では wave echo のかげに particle echo はかくれていると思われるが，興味深いのは，もし particle echo が wave echo と独立に観測できれば，(70) からもうかがえるようにプラズマにおける電子の分布関数の形が調べられること可能性のあることである。プラズマの様々な性質は電子の分布関数の形に著しく影響されるので，これを調べる方法が開拓されればそれは非常に興味深いものとなる。

Echo についてはこの他にも，衝突の効果<sup>20)</sup>や，磁場中での hybrid resonance<sup>21)</sup>を用いた echo なども調べられているが，あまり長くなるので，それらについては省略することにする。

最後に，plasma wave echo に似た現象として数年前から知られている cyclotron echo について一言ふれておこう。これは磁場中プラズマにパルス変調された電子サイクロトロン周波数をもつマイクロ波を二つ， $\tau$  という時間をおいて加えると，その後  $n\tau$  ( $n=1, 2, \dots$ ) という時刻に同じマイクロ波周波数をもったパルスがプラズマから輻射される。更に時間  $T$  をおいてもう一つの上と同じ周波数をもつパルスを加えると，引き続いて  $n\tau$  の時刻にパルスが観測される，というものである。<sup>22)</sup>これに極めてよく似た現象は固体においては spin echo として古くから知られている。プラズマに

おいては cyclotron echo と呼ばれる。この現象が、自由電子によるものである点が非常に面白い。この現象のメカニズムについては、磁場が不均一であるための dephasing effect と衝突頻度が速度、従って磁場に依存することによる非線形効果との結合によるとの説明がなされているが、実験結果は必ずしもこの二つの効果を必要としていないようである。これは今後の問題として先へ進もう。

## § 5 振 幅 振 動

§ 3 でものべたように、単一のグリッドに小さい振動電界を加えて波を励起してやると、その波の振幅はランタウ減衰しながら単調に減少し、グリッドから充分離れたところでは消えてしまう。それならもしも振動電界の振幅を大きくして行ったら何が起るであろうか。これがこの章で問題にするテーマである。

まず現象論的考察から始めよう。一般に単色波動が存在する場合には、その波の位相速度にのった座標系でみて速度の遅い粒子は、波のポテンシャルをのりこえることができず、波の谷間に捕えられて振動を始めるであろう。今、波のポテンシャルの深さを  $\varphi$  とすると、波に捕えられる粒子は速度  $v$  が

$$|v - v_{ph}| < \sqrt{|e\varphi|/m} \quad \text{-----} (71)$$

なる粒子である。ここに  $v_{ph}$  は波の位相速度

$$v_{ph} = \omega(k)/k \quad \text{-----} (72)$$

である。それらの粒子のポテンシャルの谷間での振動数は、ほぼ

$$k \sqrt{|e\varphi|/m} \quad \text{-----} (73)$$

の程度となる。これから分るように、 $\varphi$  が増すと共に捕えられる粒子の数は増し、同時に振動数 (73) も増して来る。

それではこの効果は、波の振幅にどういう影響を与えるであろうか。

まず粒子を捕えるということは、population inversion が起っていない

い状態 ( $v \partial F(v) / \partial v < 0$ ) では、粒子を全体として加速するということに対応する。そのエネルギーは当然波から与えられるのだから、波はそれによって減衰をうける。 $\phi$  が大きいほど沢山の粒子を加速しなければならないから、当然波の減衰率も  $\phi$  と共に大きくなることが期待される。しかし、一たん粒子が捕えられてしまうと、もはや加速される必要はないから、逆に波の減衰も小さくなって来るであろう。すなわち、最初は波ははげしい減衰をうけるが、間もなくその減衰に止って、一定の振幅に落ちつくであろう（飽和効果）。しかし、実際には粒子は捕えられる過程で over-acceleration を受け、捕えられた粒子全体としても coherent な振動を行う。その結果、波と捕えられた粒子群との間に周期的なエネルギーのやりとりを生じ、波の振幅にも周期的な変動をひき起す。この現象は振幅振動 (amplitude oscillation) と呼ばれ、最初 Altshul-Karpman<sup>23)</sup> および O'Neil<sup>24)</sup> によって理論的に予言され、後に Malmberg-Wharton<sup>25)</sup> によって電子プラズマ振動の場合に、また、佐藤・池地・山下・高橋・大引<sup>26)</sup> によってイオン音波の場合に、それぞれ観測された。

実はこれに似た現象は、他の分野でも、例えばスピン系での transient nutation<sup>27)</sup> とか、レーザー・レーザにおける population oscillation<sup>28)</sup> として以前から知られている。しかしこれらの場合には、外場の振幅振動をひき起すものが、常に two levels 間の電子またはスピンの遷移であり、これに対してプラズマの場合には、これが continuous levels をもつ自由電子の振動である点が興味深い。それゆえにまた、population oscillation のふるまいも単純な正弦振動とはならず、はるかに複雑なものとなる。

以下、上にのべた現象論的考察を、Vlasov 方程式に立脚して議論してみよう。簡単のため、一次元プラズマ中に波数 ( $\pm k$ ) の波を

$$E_{\text{ext}}(x, t) = 2V \cos kx \delta(t) \text{ ----- (74)}$$

という外場によって励起した場合を考える。§4 と同様、 $t < 0$  では spatial fluctuation は存在しなかったとする。この場合、時間と共に波数 ( $\pm k$ ) の波の高調波も作られて来るが、そのことは今の問題で本質的では

ないので、以下では特に断らぬ限り高調波の存在は無視することにする。この問題で重要なのは、媒質の状態を定める速度分布関数  $F_\mu(v, t)$  が波の存在で影響を受けることであるから、 $F_\mu(v, t)$  はもはや Maxwell 分布で近似することはできない。線形理論と異なる点はこの点だけである。これを考慮すると、非線形 Vlasov 方程式 (4) - (6) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_\mu(v, t) = & -\frac{e_\mu}{m_\mu} \left\{ E(k, t) \frac{\partial}{\partial v} f_\mu(v, -k, t) \right. \\ & \left. + E(-k, t) \frac{\partial}{\partial v} f_\mu(v, k, t) \right\} \quad (75) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \pm ikv \right) f_\mu(v, \pm k, t) = -\frac{e_\mu}{m_\mu} E(\pm k, t) \frac{\partial}{\partial v} F_\mu(v, t) \quad (76)$$

$$E(\pm k, t) = \pm \frac{4\pi}{ik} \sum_\mu e_\mu \int dv f_\mu(v, \pm k, t) + E_{\text{ext}}(\pm k, t) \quad (77)$$

と近似される。ただし分布関数  $F_\mu(v, x, t)$  を (8) のように分けて表わした。

まず短かい time scale で考えよう。t が小さいところでは、電場  $E(\pm k, t)$  は急速にランダウ減衰をうけるが、 $F_\mu(v, t)$  の方はゆっくりしか変化しないと考えられるので、一種の断熱近似を用いることができる。すなわち、まず  $F_\mu(v, t)$  を一定として (76) をとくとき、次にそれを (75) に代入する。今、電場  $E(\pm k, t)$  は

$$\begin{aligned} E(\pm k, t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} E(\pm k, \omega) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{V}{\epsilon(\pm k, \omega)} \\ &\doteq V \omega(k) \frac{\exp \{ [\mp i\omega(k) + \gamma(k)] t \}}{\theta(\pm k)} \quad (78) \end{aligned}$$

( $\theta(\pm k)$  は (31) 式で定義される) と表わせることを用いると、(75) は

$$\frac{\partial F_{\mu}(v, t)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} D_{\mu}(v, t) \frac{\partial}{\partial v} F_{\mu}(v, t) \quad (79)$$

という速度空間での拡散方程式に還元される。ここに拡散係数  $D_{\mu}(v, t)$  は

$$D_{\mu}(v, t) = \frac{2e_{\mu}^2}{m_{\mu}^2} \left| \frac{V\omega(k)}{\theta(k)} \right|^2 \exp[2r(k)t] \\ \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{\exp[i(ku + ir(k)t)] - 1}{- [ku + ir(k)]} \right\} \quad (80)$$

で表わされる。 $u$  は波の位相速度にのった座標系でみた速度

$$u = v - v_{ph} \quad (81)$$

である。(80) から分るように、 $D_{\mu}(v, t)$  は  $u$  の小さい所でのみ大きな値をもち、また  $V$  が大きくなると急速に増大する。すなわち (79) は、 $v \doteq v_{ph}$  なる粒子が波との相互作用で急速に加速され、速度空間での拡散が進行していくことを示している。その結果  $v \doteq v_{ph}$  での速度分布は平になる ( $\partial F_{\mu}(v, t) / \partial v \rightarrow 0$  for  $v \doteq v_{ph}$ )。それは直ちにランダウ減衰率 (30) の減少をもたらし、いわゆる減衰の飽和を生ずる。(79) の範囲内ではこれで終りだが、実際には前にものべたように、捕えられた粒子の over acceleration をひき起す。これは今のべた断熱近似を用いたのでは表わせないで、次に長い time scale での考察に移る。

長い time scale では波の減衰がほぼ飽和しているので

$$r(k) \simeq 0 \quad (82)$$

とおいてさし支えない。この近似のもとで (75), (76) をラプラス変換の方法でとく。適当な時刻  $\tau > 0$  を初期時刻にとってラプラス変換すると

$$-i\omega F_{\mu}(v, \omega) = F_{\mu}(v) - \frac{e_{\mu}}{m_{\mu}} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left\{ E(k, \omega') \frac{\partial}{\partial v} f_{\mu}(v, -k, \omega - \omega') \right. \\ \left. + E(-k, \omega - \omega') \frac{\partial}{\partial v} f_{\mu}(v, k, \omega') \right\} \quad (83)$$



$$(-i\omega \pm ikv) f_{\mu}(v, \pm k, \omega) = g_{\mu}(v, \pm k)$$

$$-\frac{e_{\mu}}{m_{\mu}} \int \frac{d\omega'}{2\pi} E(\pm k, \omega') \frac{\partial}{\partial v} F_{\mu}(v, \omega - \omega') \quad \text{-----} (84)$$

ここに  $F_{\mu}(v)$ ,  $g_{\mu}(v, \pm k)$  はそれぞれ初期値 ( $t = \tau$  における値) である。このうち、初期値  $g_{\mu}(v, \pm k)$  の寄与は、今の問題でそれほど本質的ではない<sup>\*)</sup>と期待して、以下ではこれを省略することにする。(84)を(83)に代入し、 $g_{\mu}(v, \pm k)$ を無視すると

$$\begin{aligned} -i\omega F_{\mu}(v, \omega) = & F_{\mu}(v) + \left(\frac{e_{\mu}}{m_{\mu}}\right)^2 \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega''}{2\pi} E(k, \omega') E(-k, \omega'') \\ & \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{-i(\omega - \omega') - ikv} + \frac{1}{-i(\omega - \omega'') + ikv} \right\} \\ & \times \frac{\partial}{\partial v} F_{\mu}(v, \omega - \omega' - \omega'') \quad \text{-----} (85) \end{aligned}$$

(90)をラプラス逆変換すると、結局速度分布関数は

$$\begin{aligned} F_{\mu}(v, t) = & F_{\mu}(v) + \frac{\alpha_{\mu}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{\mu n}}{2n+1} \frac{d}{du} \psi_n\left(\frac{ku}{\alpha_{\mu}}\right) \\ & \times \left\{ 1 - \cos\left(\sqrt{2n+1} \alpha_{\mu} [t - \tau]\right) \right\} \quad \text{-----} (92) \end{aligned}$$

と求められる。

さて、今  $\psi_n(ku/\alpha_{\mu})$  は

$$|ku| \equiv |k(v - v_{ph})| \lesssim \alpha_{\mu} \quad \text{-----} (93)$$

でのみ大きな値をもつ関数である。従って  $F_{\mu}(v, t)$  が時間的に変動するのは(93)をみたす速度領域だけである。この領域では  $F_{\mu}(v, t)$  は、 $\alpha_{\mu} <$

脚注\*)  $g_{\mu}(v, \pm k)$  は、たとえば(49)から分るように、 $v \div v_{ph}$  で大きな値をとるが、これを考慮に入れても、定性的に異なる新しい結果をうみ出すことはないと思われ。

ぐらいの振動数で時間的に振動する。これが波に捕えられた粒子の振動を表わしていることはいうまでもない。

それではこの振動は電場にはどういう影響を与えるであろうか。それを見るには、(90)を(84)に代入し、それを(77)に入れて  $E(\pm k, t)$  についてとけばよい。この計算は電子プラズマで振動の場合について Altshul<sup>23)</sup>-Karpman によって行われているが、かなり面倒なのでここでは結果だけを記す。

$$\frac{d}{dt} E(\pm k, t) = [\mp i\omega(k) + \Gamma(k, t)] E(\pm k, t) \quad (94)$$

$$\Gamma(k, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega(k) \omega_e^2}{k \alpha_e} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_{e2n} \psi_{2n}(0) \times \frac{\sin(\sqrt{4n+1} \alpha_e [t-\tau])}{\sqrt{4n+1}} \quad (95)$$

ここに  $\omega_e$  は電子プラズマ振動数で、 $(t-\tau) \sim (k\theta_e)^{-1}$  ( $\theta_e$  は熱速度) で消える項、および振動数  $\omega(k)$  への補正項は無視した。これから直ちに分るように、 $v \equiv v_{ph}$  の速度分布の振動はそのまま減衰率  $\Gamma(k, t)$  の振動をひき起している。(94)の解

$$E(\pm k, t) = E(\pm k, \tau) \exp \left[ \mp i\omega(k)(t-\tau) + \int_{\tau}^t dt' \Gamma(k, t') \right] \quad (96)$$

から分るように、 $\Gamma(k, t)$  の振動は直ちに  $E(\pm k, t)$  の振幅の振動に導く。

それではこの振動はいつまで続くであろうか。(95)の限りでは、この振動は永久に続く。しかもその振幅の平均は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} \Gamma(k, t') dt' = -\frac{r(k)}{\alpha_e} \quad (97)$$

( $r(k)$  は  $t = \tau$  における減衰率) で与えられ、有限に止まる。<sup>\*</sup> しかしこ

の結果は、時間と共に $(\pm k)$ の波の高周波が発生することを無視したため、実際には高調波を考慮に入れると、最初 coherent だった捕えられた粒子の振動も、次第に random になって phase mixing を起し、観測にからなくなってしまう。すなわち、(97)の左辺は零になることが示される。<sup>24)</sup>しかしその場合でも、電場の振幅 $|E(\pm k, t)|$ は有限に止まることが示される。

最後に、上にのべた事柄が実験ではどうなっているかをのべよう。まず、実験にかかっているのは、上にのべたような temporal damping における振幅振動ではなく、echo のときと同様、spatial damping での現象である。しかし、この違いはあまり本質的とは思われないので、上の議論をそのまま spatial damping での言葉にほんやくすればよいと思われる。

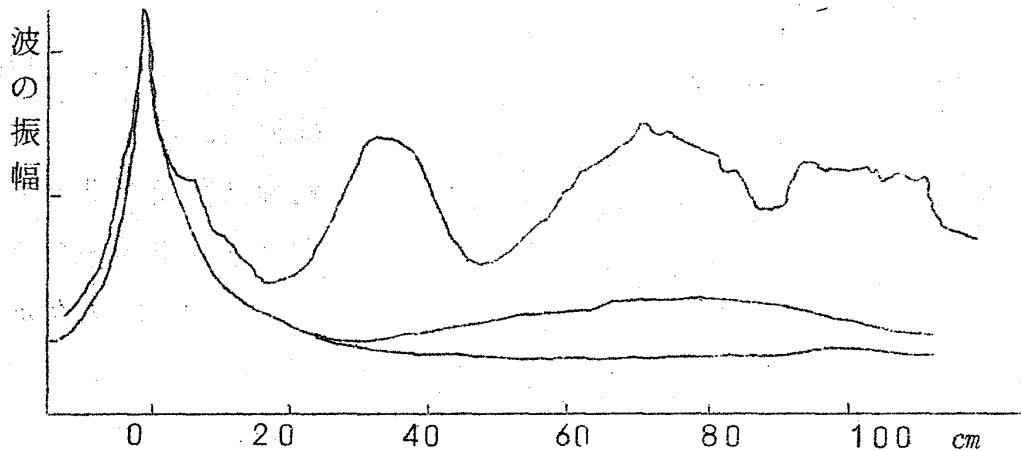
まず電子プラズマ振動での振幅振動は、Malmberg らにより、ランダウ減衰<sup>25)</sup>を測定したときと同じ装置で行われた。水素プラズマ中に二つのアンテナ（送信アンテナおよび受信アンテナ）を挿入し、送信アンテナにいろいろなパワーの交流電圧を加えて、空間電荷波を励起し、それを受信アンテナで受ける。典型的な実験データを第7図に示す。これから分るように、波の振幅は送信アンテナから数 cm の間に急速に減衰するが、パワーを上げて行くと（A→B→C）振幅は振動を始める。振幅振動の波数 $k_{osc}$ は、(73)との類推から

$$k_{osc} = \frac{k}{v_{ph}} \left( \frac{|e\phi|}{m_e} \right)^{1/2} \quad \text{----- (98)}$$

と期待される。実測値は定量的にもほぼこれと一致する値となっている。また $k_{osc}$ と印加電圧の平方根との間の比例関係もよくなり立っている。また第7図Cの場合、波の振幅の平均値は $x \rightarrow \infty$ （ $x$ は二つのアンテナ間の距離）では有限な値にとどまっている。これも上にのべた理論と consistent である。

---

脚注\*) ただし、(8.2)の近似が使えるためには、 $\alpha_e \gg |r(k)|$  でなければならない。



第7図 プラズマ振動の振幅振動。

横軸は送信アンテナと受信アンテナの距離。

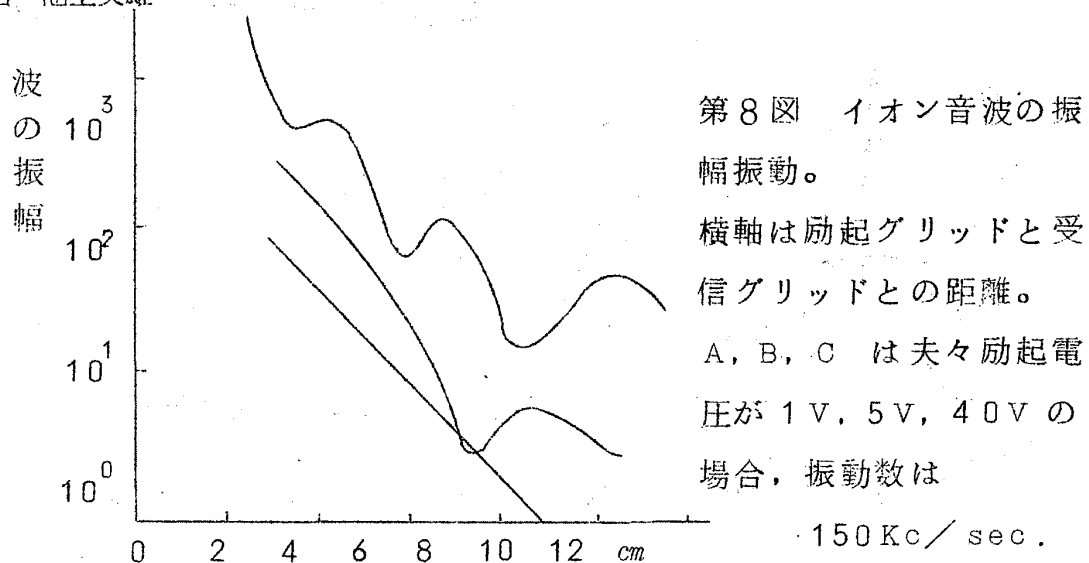
A, B, C はそれぞれ送信アンテナに加えた電圧が 0.9V, 2.85V, 9V の場合。

次にイオン音波での実験<sup>26)</sup>についてのべよう。この測定は、セシウムプラズマを用いて、Wong らがランダウ減衰を測定したのと本質的に同じ方法で行われた。この場合、電子温度とイオン温度とはほぼ同じくらいなので、イオン音波のランダウ減衰はほとんどイオンの加速を通して行われる。従って振幅振動の波数もイオンできまり

$$k_{osc} \doteq \frac{k}{v_{ph}} (|e\phi|/m_i)^{1/2} \quad \text{----- (9.9)}$$

で与えられると期待される。この場合の問題点は、 $k_{osc}$  がランダウ減衰率  $K''(\omega)$  とほぼ同じくらいになることである。そのため、上にのべた long time approximation (8.2) ( $K''(\omega) \simeq 0$  に対応する) は使えない。しかし、それでも第8図に示すように、振幅振動は明らかに観測されている。測定された  $k_{osc}$  はほぼ (9.9) で与えられる数値を示し、その  $k$  依存度や印加電圧への依存性も (9.9) と大体 consistent になっている。

この測定結果で一つ特徴的なことは、イオン音波の振幅が減衰しながら振動していることである (第8図)。これが  $k_{osc} \sim K''(\omega)$  であるために起っているのか、それともプラズマの拡散による loss またはイオン・イオン



衝突による loss (平均自由行程  $\sim 10k_{osc}^{-1}$ ) が原因しているのか等、まだ明らかでない。

イオン音波の振幅振動で特に面白いのは、大振幅波が振幅振動を起している状態で、他の振動数の小振幅波を加えると、それも一諸になって振幅振動を初めることである。これは、イオン音波では、位相速度がいろいろな  $\omega$  に対してほぼ一定のため、ある振動数の大振幅波で  $v \approx v_{ph}$  くらいの速度をもつイオンの振動を起させると、それはそのイオン音波のみならず、他のイオン音波の減衰率にも振動をもたらすからである。

以上の外にも、大振幅イオン音波の減衰過程において興味深い現象がいくつか観測されているが、それらについては、上の理論の範囲内で説明できることなのか、それとももっと泥臭いこと (例えばプラズマの作り方など) によっているのか、明らかでない面があるので、省略することにする。

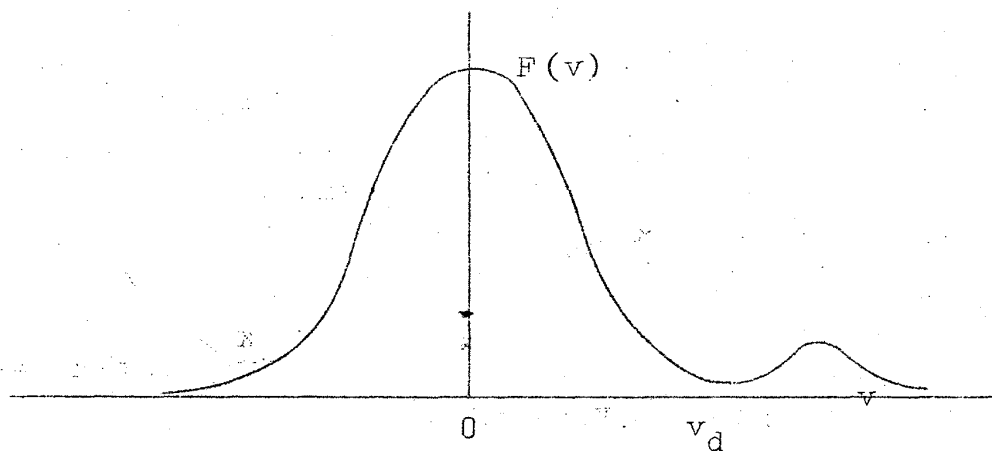
## § 6 その他の問題

以上、実験室で作られる安定な無衝突プラズマについて、最近の顕著な研究のいくつかを詳説してきたが、無衝突プラズマでは、この他にも興味深い問題が数多く存在する。

その中で一つの重要な問題は、不安定プラズマにおける問題である。もともと実験室で作られるプラズマは、ほとんど常に不安定性におびやかされて

いる。ある時はプラズマ全体が消え失せてしまうような巨視的な不安定性に見舞われるが、物性理論の立場から興味あるのは、巨視的には安定だが内部に数多くの波を励起している場合である。このような状態を“乱れたプラズマ” (turbulent plasma) と呼んでいるが、このような乱れた状態の理論的研究は近年一つの流行を形造っている。

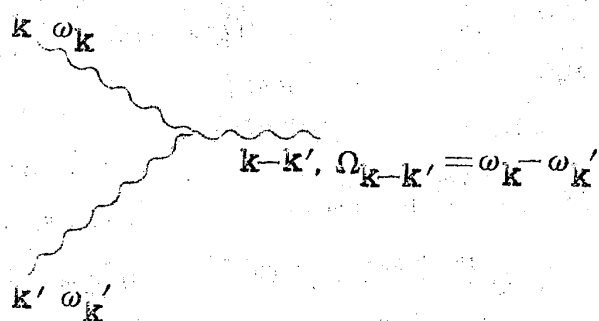
今、このような乱れのできる一例として、プラズマ中に高速電子ビームのある場合を考えよう。すると電子の速度分布関数は第9図のようになり、ビームの速度  $v_d$  より少し小さいところで  $\partial F / \partial v$  が正になる。もしも分散関係をみたす波の中で、ちょうどこのあたりに位相速度をもつものがあつたとすると、(30) から明らかなように、線形理論では  $r(k) > 0$  となり、波の振幅は指数関数的に増大することになる。当然波の振幅が増大してくれば、非線形効果がきいてきて、最後はその不安定成長も止るであろう。問題はどのような非線形効果がきいて来るかである。



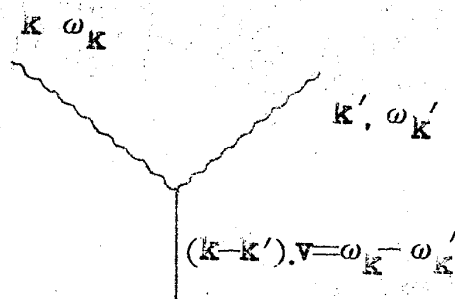
第9図 高速電子ビームの存在で不安定になる速度分布の例

最も簡単な非線形効果は、§5で論じた媒質すなわち速度分布への影響である。波の成長と共に、位相速度附近での速度空間の拡散が増大し、 $F(v \div v_{ph})$  は平になる。すると成長率がおさえられて、波の成長は止り、ある定常状態に到達するだろうというのである。これは準線形効果と呼ばれ、Drummond — Pines<sup>29)</sup> および Vedenko — Velikhov — Sagdeev<sup>30)</sup> によって最初に論じられた。

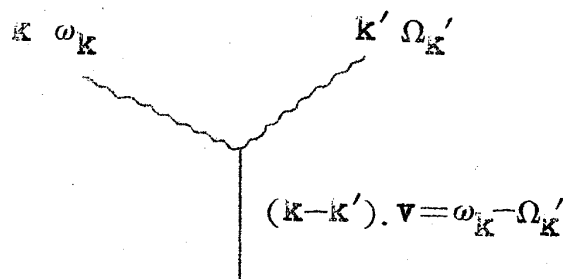
しかし、このままでは、励起される波のスペクトルはほとんど最初に不安定であったモードに限られる。実際には、波の振幅が増大すると共に、異なるモードの波の間の相互作用がきき始め、波のスペクトル分布はずっと広がるはずである。実際乱れた状態とはそのような状態に当てはまる用語である。ところが、モード間結合を考えると、実に無数の可能性を考えなければならなくなる。例えば、プラズマパラメーターで最低次のモード間結合をとっただけでも、第10図に示すように何種類かの可能性が現われる。



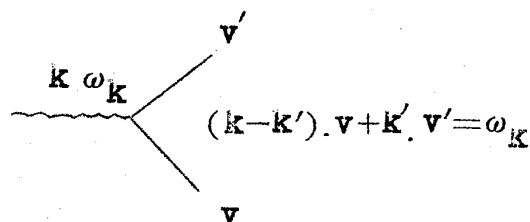
(a) Three wave process



(b) Compton scattering, two wave absorption and emission of plasma wave.



(c) Conversion between plasma wave and ion wave accompanied by heating or cooling of electrons.



(b) Bremsstrahlung and its inverse process of plasma wave at electron collisions

第10図 プラズマ・パラメーターで一つ高次でプラズマ振動  $(k, \omega_k)$  の減衰にきく processes.  $\omega_k, \Omega_k$  はそれぞれプラズマ振動およびイオン音波の振動数。

しかもこれに、近距離衝突の効果も考えにいれなければ本当は正しくない。こうなると現象は著しく複雑になるが、その中でいくつかの重要な効果については最近かなりくわしく調べられてきている。それらは例えば水野幸雄氏の解説<sup>31)</sup>や Tsytovich の総合報告<sup>32)</sup>にくわしく論じられているので、興味ある読者はそれを読んでいただくことにする。

ここでは、そのような複雑な理論が、我々にどういう興味深い問題を提起してくれるかについて、二、三の例を述べよう。一つは、第10図 a) および c) で表わされる電子プラズマ振動とイオン音波との相互作用である。これら二つの波は、その振動数および位相速度が著しく異なるために、線形理論の範囲内では、単一のビームで両方同時に励起されることは滅多に起らないにもかかわらず、実験ではしばしば両者が同時に励起され、相互に強い関係のあることが報告されている。<sup>33)</sup> この問題は非線形効果の最も基礎的な問題の一つであり、第10図 a), c) に記した相互作用まで考えて始めて理解できる現象である可能性がある。今一つは、プラズマ中に高速電子ビームが存在するとき、しばしば最初のビームより数倍も早い高速電子が生成される現象である。<sup>34)</sup> この現象はビームと個別粒子との相互作用を考えただけでは理解できず、その間に波が介在していることを考えなければならない。すなわち、ビームがまず波を励起し、その波が粒子を加速するという考え方である。この現象は乱流加熱と呼ばれ、乱れを積極的に利用して超高温プラズマを作ろうという目的で最近盛んに研究されている。最後に乱れの輸送係数への影響が興味深い問題を提起してくれる。その中で古くから問題とされているのは核散係数の異常である。これについては次稿で天野氏が詳しく論ずる予定である。

無衝突プラズマの最も典型的な例は、しかし、実験室よりはむしろ宇宙空間に存在する。実際、電離層の下層以上の空間はすべて無衝突プラズマと考えてさし支えない。最近の宇宙科学の進歩にともなって、宇宙空間プラズマにおける波動現象は数多く観測され、また理論的にも調べられてきている。その中で一つの challenging な問題は、地球磁気圏の表面（太陽側）に現われる無衝突衝撃波と呼ばれるものの存在である。通常の理論では、衝撃波は、非線形効果と衝突 (dissipation) とか同時に働いて始めてできるも



西川恭治・池上英雄

のだが、平均自由行程が  $10^7$  Km もあるところに  $10^4$  Km ぐらいの巾をもつ衝撃波が存在するとすれば、それは理論家にとって驚異な事実である。何らかの乱れが原因で平均自由行程の実効値が小さくなっているとも思われるが、まだ満足な理論は何一つ提出されていない。その他にも興味深い現象は数多く存在するらしいが、筆者らの勉強はまだそこまで至ってないので、あまりボロが出ないうちにこの辺で筆をおくことにする。

終りに、いろいろ文献を教えて下さった京大理学部端恒夫氏、恒藤敏彦氏、および未発表のデーターを提供して下さいったプラズマ研 T P C 共同利用研究グループの方々に深く感謝いたします。

#### § 4 - § 6 文 献

- 15) J. H. Malmberg, C. B. Wharton, R. W. Gould and T. M. O'Neil, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 95.
  - 16) H. Ikezi and N. Takahashi, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 140.
  - 17) D. R. Baker, N. R. Ahern and A. Y. Wong, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 318.
  - 18) R. W. Gould, T. M. O'Neil and J. H. Malmberg, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 219.
  - 19) R. W. Gould, Phys. Letters 25 A (1967) 559.
  - 20) C. H. Su and C. Oberman, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 427.
  - 21) L. O. Bauer, F. A. Blum and R. W. Gould, Phys. Rev. Letters 20 (1968) 435.
  - 22) R. M. Hill and D. E. Kaplan, Phys. Rev. Letters 14 (1965) 1062.
- F. W. Crawford, R. S. Harp and H. Ikegami, Bull. Am. Phys. Soc. 11 (1966) 449.
- R. W. Gould, Phys. Letters 19 (1965) 477.

F.W.Crawford and R.S.Harp, Phys. Letters 21 (1966)

292. 他

23) L.M.AL'tshul' and V.T.Karpman, Sov. Phys. JETP 22  
(1966) 361.

24) T.M.O'Neil, Phys. Fluids 8 (1965) 2255.

25) J.H.Malmberg and C.B.Whavton, Phys. Rev. Letters 19  
(1967) 775.

26) N.Sato, H.Ikezi, Y.Yamashita, N.Takahashi and T.Obiki,  
preprint ; 日本物理学会年会 (1968年4月, 大阪) 講演

27) 例えば A.Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism  
(Oxford at the Clarendon Press, 1961) p68.

28) 例えば R.P.Feynman, R.B.Leighton and M.Sands, the  
Feynman, Lectures in Physics (Addison Wesley Publishing  
Comp. Inc. 1965) § 9.4

29) W.E.Drummond and D.Pines, Nucl. Fusion Suppl. pt 3  
(1962) 1049.

30) A.A.Vedenov, E.P.Velikhov and R.Z.Sagdeev, Nucl.  
Fusion Suppl. pt. 2 (1962) 465.

31) 水野幸雄, 日本物理学会誌 22 (1967) 262.

32) V.N.Tsyovich, Sov. Phys. USPEKHI 9 (1967) 805.

33) V.D.Fedorchenko, V.I.Muratov and B.N. Rutkevich, Sov.  
Phys - Tech. Phys. 10 (1966) 1549, 11 (1967) 1462.

天岸祥光, 河辺隆也, 小島昌治, 核融合研究 20 (1968) 21.

浅野正邦, 大引得弘, 板谷良平, 日本物理学会年会 (1968年4月,  
大阪) 講演.

34) 例えば, 長谷川晃, 日本物理学会誌 (Butsuri) 23 (1968) 180.